

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI
Etapa locală: 21 februarie 2016
Filiera teoretică: profilul științele naturii
Barem orientativ

Clasa XI

1. Știind că $f(X) = X^2 + 2I_3$ iar $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ să se calculeze $\det(A)$ și $f(A)$.

Soluție: $\det(A)=4$1p

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$3p

$f(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 12 \end{pmatrix}$3p

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} - \{-q\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+px+p}{x+q}$ unde p și $q \in \mathbb{R}$.

Găsiți p și q pentru care dreapta $y = x + 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ a funcției f iar $f(0) = 2$.

Soluție: Asimptotă oblică are forma $y = mx+n$ 1p

$m = 1$ 1p

$n = p - q$ 2p

$f(0) = \frac{p}{q}$ 1p

se obțin $p = 2$ și $q = 1$ 2p

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} - \{-q\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+px+p}{x+q}$ unde p și $q \in \mathbb{R}$.

Găsiți o relație între p și q astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)^x = 1$.

Soluție: Limita este de tipul 1^∞ 1p

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)^x = e^{p-q}$ 5p

$p = q$ 1p

4. Codificarea unui mesaj folosind înmulțirea matricelor și pătratul lui Polybe:

	1	2	3	4	5
1	a	b	c	d	e
2	f	g	h	ij	k
3	l	m	n	o	p
4	q	r	s	t	u
5	v	w	x	y	z

Exemple: salut=43 11 31 45 44, la masa=31 11 32 11 43 11

Pentru complicarea codificării putem folosi matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ astfel: textul codificat cu pătratul Polybe, îl scriem sub forma unei matrice cu 2 linii și n coloane, în funcție de câte elemente avem(dacă e nevoie mai adăugăm un 0).

Salut = 43 11 31 45 44 devine matricea $S = \begin{pmatrix} 43 & 31 & 44 \\ 11 & 45 & 0 \end{pmatrix}$

La masa = 31 11 21 15 31 devine matricea $L = \begin{pmatrix} 31 & 32 & 43 \\ 11 & 11 & 11 \end{pmatrix}$.

Înmulțim matricea A cu matricea S și obținem $AS = \begin{pmatrix} 43 & 31 & 44 \\ 97 & 107 & 88 \end{pmatrix}$. Destinatarul mesajului va primi textul codificat: 43 97 31 107 44 88 și matricea A. Pentru a-l descifra trebuie să calculeze inversa matricei A, după care să înmulțească A^{-1} cu matricea cu 2 linii și n coloane pe care o scrie din mesajul primit, adică $\begin{pmatrix} 43 & 31 & 44 \\ 97 & 107 & 88 \end{pmatrix}$, iar rezultatul să-l descifreze cu pătratul lui Polybe.

- Calculați inversa matricei A.
- Scrieți folosind pătratul lui Polybe textul: olimpiada
- Codificați folosind matricea A și procedeul descris mai sus textul:olimpiada
- Descifrați mesajul 13 37 31 86 21 66 13 37 44 88.

Soluție:

- Inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$1p
- Olimpiada=34 31 24 32 35 24 11 14 11.....1p
- 34 99 24 80 35 94 11 36 11 22.....2p
- Calificat.....3p